## Cải thiện ảnh trên miền tần số

### Phép biến đổi Fourier

Phép biến đổi ảnh là sự chuyển đổi một biểu diễn ảnh từ không gian ban đầu sang một không gian khác để tiện lợi cho việc xử lý. Biến đổi Fourrier cho một tín hiệu có thể hình dung như sau:

x(t) TF X(f)

Miền thời gian Miền tần số

Biến đổi Fourier là một cặp biến đổi: Biến đổi thuận và biến đổi ngược. Biến đổi thuận: chuyển sự biểu diễn từ không gian thực sang không gian tần số (phổ và pha). Các thành phần tần số này được gọi là các biểu diễn trong không gian Fourrier của tín hiệu. Biến đổi ngược: chuyển đổi sự biểu diễn của đối tượng từ không gian Fourrier sang không gian thực.

Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc DFT (*Discrete Fourrier Transform*) là một biến đổi chuyển sự biểu diễn ảnh trong miền không gian sang biểu diễn trong miền tần số (miền Fourier). Từ công thức xuất phát  dẫn đến biến đổi Fourier để biểu diễn ảnh trong không gian mới theo các hàm sin và cos.

### Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu một chiều

Tín hiệu rời rạc S[n] với n = 0, 1, …, N-1 trong miền không gian. V[k] là triển khai Fourier với k = 0, 1, …, N-1. Xét với N = 2B. Khi đó, công thức biến đổi thuận và biến đổi ngược được xác định như sau:

* + Thuận:  với 

Hay  với k = 0, 1, …, N-1

* + Ngược:  với 

Hay:  với n = 0, 1, …, N-1

Ví dụ: Tính DFT của ,  với N = 4, k = {-2, -1, 0, 1}

* + Tính ma trận hệ số  với k = {-2, -1, 0, 1}, n = {-2, -1, 0, 1} (tức là N= 4)





* + Chuyển vị S1 được [8 1 8 1], vậy DFT là:



* + Chuyển vị S2 được [1 8 1 8], vậy DFT là:



### Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu hai chiều (ảnh số)

Giả sử ta cần thực hiện biến đổi Fourier cho ảnh S[m,n] với m = 0, 1, …, M-1, n = 0, 1, …, N-1 trong miền không gian. S[u,v] là triển khai Fourier của ảnh với u = 0, 1, …, M-1, v = 0, 1, …, N-1. Khi đó, công thức biến đổi thuận và biến đổi ngược được thực hiện như sau:

* + Biến đổi thuận: 

với 

Hay:  với u = 0, 1, …, M-1, v = 0, 1, …, N-1

* + Biến đổi ngược: 

với 

Hay:  với m = 0, 1, …, M-1, n = 0, 1, …, N-1

**Biến đổi Fourier nhanh FFT** (*Fast Fourier Transform*)

;  với 

Trong đó ;  với 

* + Tính DFT một chiều với giá trị của S (theo cột) được S’.
  + Tính DFT một chiều theo hướng ngược lại (theo hàng) với giá trị của S’.

Ví dụ: tính DFT của ảnh số ; N = M = 4; m,n ={-2, -1, 0, 1}

* + Tính ma trận hệ số của biến đổi DFT một chiều với M = N = 4



* + Tính DFT của S(m,n) theo cột:

Tính DFT của ; ; ; 

DFT của S(m,n) theo cột là 

* + Tính DFT của S(u,n) theo hàng:

Tính DFT của ; ; ; 

Tính DFT của S(-2,v):



Tính DFT của S(0,v):



Tính DFT của S(-1,v) và S(1,v) là 

Vậy, DFT của S là 

Phổ của ảnh: Kết quả của phép biến đổi Fourier gọi là phổ của ảnh. Ảnh S(m,n) qua phép biến đổi Fourier có phổ là S(u,v). Phổ biên độ hay còn gọi là cường độ của ảnh là  biểu diễn cường độ của ảnh và được tính bằng công thức . Phổ pha là arg(S(u,v)) biểu diễn pha của ảnh và được tính bằng công thức . Phổ năng lượng của ảnh là .

Trong xử lý ảnh thường quan tâm đến cường độ ảnh vì nó chứa hầu hết các thông tin về cấu trúc hình ảnh của ảnh trong miền không gian quan sát. Tuy nhiên, nếu muốn chuyển ngược ảnh trong miền tần số về miền không gian một cách chính xác cần phải bảo toàn được cả cường độ và pha.

Áp dụng tính DFT của ảnh số ; N = M = 3; m,n ={0,1,2}.

* + Tính ma trận hệ số của biến đổi DFT một chiều với M = N = 3



* + Tính DFT của S(m,n) theo cột thành S(u,n).
  + Tính DFT của S(u,n) theo hàng thành S(u,v).

### Biến đổi Cosin rời rạc

Biến đổi Cosin rời rạc DCT (*Discrete Cosine Transform*) là cơ sở của nhiều thuật toán nén ảnh. Một trong những ưu điểm của DCT hơn DFT đó là không cần thao tác trên các con số phức tạp. Công thức của DCT:

* Biến đổi DCT thuận:



với u = 0, 1, …, M-1, v = 0, 1, …, N-1

Trong đó: 

* Biến đổi ngược DCT:



với m = 0, 1, …, M-1, n = 0, 1, …, N-1

Ảnh có thể được phân chia thành một tập các hàm cơ bản với DCT. Điều này có nghĩa là một ảnh có thể được tạo bởi một tập riêng các hàm cơ bản.